Задача Арнольда про двух старушек.

Академик В. Арнольд упоминал, что ему задали задачу в пятом классе:

Из А в В и из В в А на рассвете (одновременно) вышли навстречу друг другу (по одной дороге) две старушки. Они встретились в полдень, но не остановились, а каждая продолжала идти с той же скоростью, и первая пришла (в В) в 4 часа дня, а вторая (в А) в 9 часов вечера. В котором часу был в этот день рассвет?
[Арнольд2004,с.4, задача 5]

Рисунок

Пусть t - время от рассвета до встречи.
Путь от города А до места встречи: $v_1t=9v_2$ (1)
Путь от города В до места встречи: $v_2t=4v_1$, (2)

Теперь необходимо решить эту систему из 2-х уравнений и получить результат. Если разделить (1) на (2), то сократится время и можно узнать соотношение скоростей старушек, откуда несложно определить искомый результат.

$v_1/v_2 = 9v_2/4v_1$ и $v_1^2/v_2^2 = 9/4$, а $v_1/v_2=3/2$

Если перемножить (1) на (2), то сократятся скорости и останется $t^2=36$, откуда $t=6$.

Если из уравнения (2) выделить скорость второй старушки: $v_2=4v_1/t$.

и подставить в первое уравнение: $v_1t=9\cdot4\cdot v_1/t$,

v_1 сокращается, остается $t^2=36$, что имеет два корня $t=6$ и $t=-6$. откуда можно понять, что до встречи старушки шли шесть часов. Следовательно, рассвет 12-6 в 6 часов утра.

Что значит корень -6 как-то в голову не лезет. Пусть будет, что время отрицательным быть не может.

Очень понравилось, что можно ввести m и n - полное число суток, которое прошли старушки после встречи. Учитывается ли перенос времени суток?

Особенность этой задачи в том, что не всегда удается удачно составить систему уравнений. Но это не препятствует решению, только делает его трудоемким и не столь элегантным, а также требующим большой скурпулезности и внимательности.

Пусть S - длина пути между пунктами А и Б.

$$(t + 4)\, v_1 = S \quad (1)$$
$$(t + 9)v_2 = S \quad (2)$$
$$t \cdot (v_1+v_2) = S \quad (3)$$

Остается решить эту систему уравнений:
Выделяем из (1) и (2) скорости и подставляем в (3)

Проведя необходимые преобразования приходим к тому же:
$t^2 = 36$.

Задача Арнольда про сущеные огурцы.

В мешке 100 кг огурцов. Огурец на 99% состоит из воды. Огурцы подсушили, и теперь вода составляет уже только 98% их веса. Сколько теперь весят огурцы? Американские студенты (да и профессора) обычно отвечают “97 кг” (или что-нибудь в этом роде). Выпускники Московской школы (скажем, из Независимого Университета или из Центра Непрерывного Математического Образования) немедленно дают правильное решение (хотя ответ и неправдоподобен: 50 кг)
http://frolencia.nm.ru/Students/ARNOLD.TXT

ВОПРОС No 86 Пионеры собрали в лесу 100 кг грибов 99 % влажности. Пока они несли грибы в лагерь, влажность уменьшилась до 98 %. Сколько килограммов грибов принесли пионеры в лагерь?
Ответ тот же: 50 кг
[Латыпов2015,с.157. Инженерная эвристика]

Леспромхоз решил вырубить лес.
Некий леспромхоз решил вырубить сосновый лес, но экологи запротестовали. Тогда директор леспромхоза всех успокоил,сказав : “ В нашем лесу 99% сосны. После рубки сосна будет составлять 98% всех деревьев”. Какую часть леса может вырубить леспромхоз?
https://otvet.mail.ru/question/55314037

У вас 100 кг свежих ягод, в которых 99% процентов массы приходится на воду. Через некоторое время содержание воды в ягодах уменьшается до 98%. Сколько теперь весят ягоды?
[Позаметье.Стратегия2018,с.29]

Арнольд Владимир Игоревич(1937-2010) Один из крупнейших математиков 20 века, академик АН СССР(1990). Ученик Колмогорова А.Н.

1. Арнольд2002: Арнольд В.И. Математический тривиум// Успехи математических наук. 1991. т. 46 вып.1(277). с.225-232. www.mapleprimes.com/DocumentFiles/100963/318078/paper_rm_46_225.pdf

2. Арнольд2002: Арнольд В.И. Что такое математика? - М.: МЦНМО, 2002. - 104с.

3. Арнольд2002b: Арнольд В.И. Истории давние и недавние.- М.:ФАЗИС, 2002. - 96с.

4. Арнольд2011: Арнольд В.И. Математическое понимание природы. Очерки удивительных физических явлений и их понимания математиками (с рисунками автора).- 3-е изд., стереотип.- М.: Издательство МЦНМО, 2011. - 144с.

   Мне кажется, что было бы лучше «и их понимание», а не «понимания», но так у автора (или у тех, кто готовил книгу к печати).

5. Арнольд2013: Арнольд В.И. «Жесткие» и «мягкие» математические модели. - М.: МЦНМО, 2013. - 32с.

6. Арнольд2012: Арнольд В.И. Очевидное-невероятное: Задачи Владимира Арнольда www.youtube.com/watch?v=Ra9KLfHq-7U&t=629s

7. Арнольд2000: Задачи Арнольда. - М: Фазис, 2000. - 454с.

8. Арнольд80: Арнольд В.И. К восьмидесятилетию. - М: МЦНМО, 2018. - 496с.

9. Арнольд В.И.: Нужна ли в школе математика? // Доклад на Всероссийской конференции «Математика и общество. Математическое образование на рубеже веков» в Дубне 21 сентября 2000 года.
http://scepsis.net/library/id_649.html

10. Арнольд:Экспериментальное наблюдение.2006:
Арнольд В.И. Экспериментальное наблюдение математических фактов. - М: МЦНМО, 2006. - 120с.
https://www.mccme.ru/free-books/dubna/via-exp.pdf

11. Арнольд.Задачи5-15.2004: Арнольд В.И. Задачи для детей от 5 до 15 лет. — М.: МЦНМО, 2004. — 16 с. - Тираж 5000.
http://ilib.mccme.ru/pdf/VIA-taskbook.pdf

Эти задачи я записал в Париже весной 2004 года, когда русские парижане попросили меня помочь их малолетним детям приобрести традиционную для России, но далеко превосходящую все западные обычаи культуру мышления. Я глубоко убежден, что эта культура более всего воспитывается ранним самостоятельным размышлением о простых, но не легких вопросах, вроде приведенных ниже (рекомендую особенно задачи 1, 3, 13).
[Арнольд.Задачи5-15.2004,с.3]

1. У Маши не хватало для покупки букваря семи копеек, а у Миши одной копейки. Они сложились, чтобы купить один букварь на двоих, но денег все равно не хватило. Сколько стоил букварь?

Если денег нет у Маши, то и у Миши не хватит. А букварь стоит 7 коп.

Маша: $x - 7$
Миша: $x - 1$
У двоих: $2x - 8 < x$, и тогда $x < 8$.

Если букварь стоит меньше 7 коп., то значит на счет Маши выставлено инкассовое поручение, и она не может заплатить за букварь, не погасив его.

2. Бутылка с пробкой стоит 10 копеек, причем бутылка на 9 копеек дороже пробки. Сколько стоит бутылка без пробки?

Б + П = 10
Б - П = 9

2Б = 19, Б = 9.5, П = 0.5
{Задача решается на уровне математики, но в жизни дробные цены копеек обычно все-таки не применяются.}

3. Кирпич весит фунт и полкирпича. Сколько фунтов весит кирпич?

Пусть кирпич весит x.

Тогда $x = 1 + 1/2 \cdot x$
$x/2 = 1$; $x = 2$

{Кирпич весит килограмма 3, а совсем не фунт. Как говорится математически верно, практически неверно. Вообще-то лучше измерять вес в кг.}

4. Из бочки вина перелили ложку его в (неполный) стакан с чаем. А потом такую же ложку (неоднородной) смеси из стакана – обратно в бочку. Теперь и в бочке, и в стакане имеется некоторый объем посторонней жидкости (вина в стакане, чая в бочке). Где объем посторонней жидкости больше: в стакане или в бочке?

Обратите внимание: спрашивают про объем, а не про концентрацию. Сколько вина перенесли в стакан, столько чая вернулось. И наоборот.

5. Из A в B и из B в A на рассвете (одновременно) вышли навстречу друг другу (по одной дороге) две старушки. Они встретились в полдень, но не остановились, а каждая продолжала идти с той же скоростью, и первая пришла (в B) в 4 часа дня, а вторая (в A) в 9 часов вечера. В котором часу был в этот день рассвет?

Арнольду и двум старушкам посвящена отдельная секция.

6. Гипотенуза прямоугольного треугольника (в американском стандартном экзамене) – 10 дюймов, а опущенная на нее высота – 6 дюймов. Найти площадь треугольника.
С этой задачей американские школьники успешно справлялись 10 лет, но потом приехали из Москвы русские школьники, и ни один эту задачу решить, как американские школьники (дававшие ответ 30 квадратных дюймов), не мог. Почему?

Да, такого прямоугольного треугольника не существует. Что здесь имеет больший приоритет: найти все же площадь, что имеет практический смысл, или сказать, что такой прямоугольный треугольник с такими гипотенузой и высотой не существует, а существует обычный треугольник, площадь которого находится по стандартной формуле.
Рисунок треугольника.

7. У Васи сестер на 2 больше, чем братьев. На сколько у Васиных родителей больше дочерей, чем сыновей?

Пусть x = братьев у Васи, тогда сестер x + 2. Дальше идет переход к сыновьям и дочерям и важно не забыть самого Васю, который, который по всей вероятности, является сыном. Тогда и дочерей будет больше, чем сыновей только на 1.

8. В Южной Америке есть круглое озеро, где 1 июня каждого года в центре озера появляется цветок Виктории Регии (стебель поднимается со дна, а лепестки лежат на воде, как у кувшинки). Каждые сутки площадь цветка увеличивается вдвое, и 1 июля он, наконец, покрывает все озеро, лепестки осыпаются, семена опускаются на дно. Какого числа площадь цветка составляет половину площади озера?

Данная задача относится к задачам на удвоение и половину озера цветок займет в предпоследний день.
Однако есть два замечания. Во-первых, столь быстрый рост с какого-то момента будет затруднен по физическим законам и его скорость будет уменьшаться. Во-вторых, первоначальный цветок за 30 дней увеличится в 2^{30} (примерно в 1 млрд. раз). Что, впрочем, скорее всего не превысит площади квадратного километра. (Если скажеи начинать с квадратного сантиметра). Арнольд с точки зрения математики очень корректно подобрал время удвоения. (В отличие от других авторов и вариантов этой задачи. Например [Конникова2014,с.193] отводит на заполнение озера 48 дней, а есть ли такие озера, ну может быть Каспийское море.)

9. Волк, коза и капуста должны быть перевезены мужиком через реку в лодке, но лодка столь мала, что он может брать с собой только один из трех грузов. Как перевезти все три груза (волка нельзя оставлять наедине с козой, а козу – с капустой) через реку?

Эта задача присутствует в задачах Алкуина под номером 18.

10. Улитка за день залезает вверх по столбу на 3 см, а за ночь, уснув, нечаянно спускается на 2 см. Высота столба 10 м, а наверху лежит вкусная для улитки конфета. Через сколько дней улитка ее достанет?

11. Охотник прошел от своей палатки 10 км на юг, повернул на восток, прошел прямо на восток еще 10 км, убил медведя, повернул на север и, пройдя еще 10 км, оказался у палатки. Какого цвета был медведь и где это все было?

Подразумевается, что медведь белый.

12. Сегодня в 12 часов дня был прилив. Когда он будет (там же) завтра?

13. На книжной полке рядом стоят два тома Пушкина: первый и второй. Страницы каждого тома имеют вместе толщину 2 см, а обложка – каждая – 2 мм. Червь прогрыз (перпендикулярно страницам) от первой страницы первого тома до последней страницы второго тома. Какой путь он прогрыз?
[Эта топологическая задача с невероятным ответом – 4 мм – совершенно недоступна академикам, но некоторые дошкольники легко справляются с ней.]

Задача имеет два решения, хотя ответ Арнольда и более вероятен.

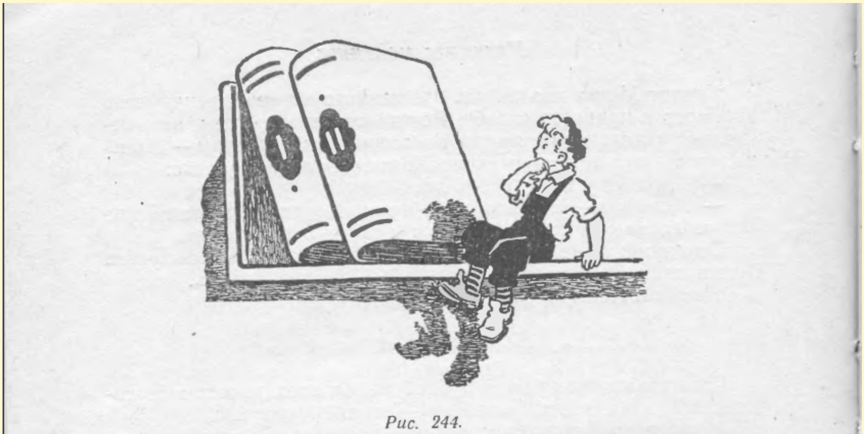


Рис. 244.

Хитрый Перельман Я.И. нарисовал расположение томов и внес его в условие задачи.
[Перельман Я.И. Занимательные задачи и опыты. - М: Детгиз, 1959, с.327-328]

16. Положив (нужным образом) друг на друга несколько одинаковых пластинок (например, костяшек домино), можно образовать навес длиной x костяшек. Каково наибольшее достижимое значение длины навеса x?

{Задача рассматривается в [Паунстоун.Google,с.181,337].
В качестве пластинок служат кирпичи. Ответ, конечно, удивительный. Значение длины навеса теоретически не ограничено. На практике возможно поставить кирпичи так, чтобы длина была в 2 кирпича, а при 3-х конструкция станет неустойчивой.
При пяти кирпичах длина выступания превысит длину одного кирпича и это хорошо для демонстрации.
Рисунок был бы не лишним.
10 кирпичей - выступание 1.46.
100 кирпичей - выступание 2.59.
1000 кирпичей - выступание 3.45.
Источники задачи:
Фер. Элементарная математика.1850.
Гамов. Математические загадки.1958.
Гарднер
[Источники приведены по Паундстоун.Google.2013,с.343]}

17. От города А до города В расстояние 40 км. Два велосипедиста выехали из А и из В одновременно и навстречу друг другу, один со скоростью 10 км/час, а другой – 15 км/час. Муха вылетела с первым из А со скоростью 100 км/час, долетела до второго, села ему на лоб и полетела обратно к первому, села ему на лоб, вернулась ко второму и так далее, пока они не столкнулись лбами и не раздавили ими муху. Сколько километров она пролетела всего?

Задача рассматривается в отдельной секции в контексте решения фон Неймана.
Данная задача приводится в [Игнатьев.В царстве Смекалки. 1981,с.15, Задача 33]

18. Одна костяшка домино покрывает две клетки шахматной доски. Покрыть 31 костяшкой все клетки, кроме двух противоположных (на одной диагонали). [Шахматная доска состоит из 8 × 8 = 64 клеток.]

20. Имея два сосуда объемом 5 литров и 3 литра, отмерь один литр (получи его в одном из сосудов).
{Задачи с сосудами рассмотрены в отдельной секции.
Здесь заливают воду из озера в 3л, переливают в 5л, затем снова заполняют 3 литра и переливают в 5л. Туда поместится только 2л, а 1л останется в 3л сосуде}

21. В семье пять голов и четырнадцать ног. Сколько из них людей, а сколько собак?

{Пять голов требуют 10 ног для двухногих. Осталось 4 непристроенные ноги или 2 головы. Отберем 2 головы от двухногих и отнесем к четвероногим. Следовательно, если причислять людей к двухногим, то их 3, а собак (четвероногих) - 2.}

45. В турнире «на кубок» участвуют n команд, и проигравший выбывает, а после n−1 игры остается победитель. Расписание турнира можно записать в виде символа вроде ((a, (b, c)), d) [b играет с c, победитель с a, победитель с d]. Сколько разных расписаний, если команд 10?

62. В классе из n учеников оценить вероятность наличия двух учеников с одинаковыми днями рождения. Велика она или мала?

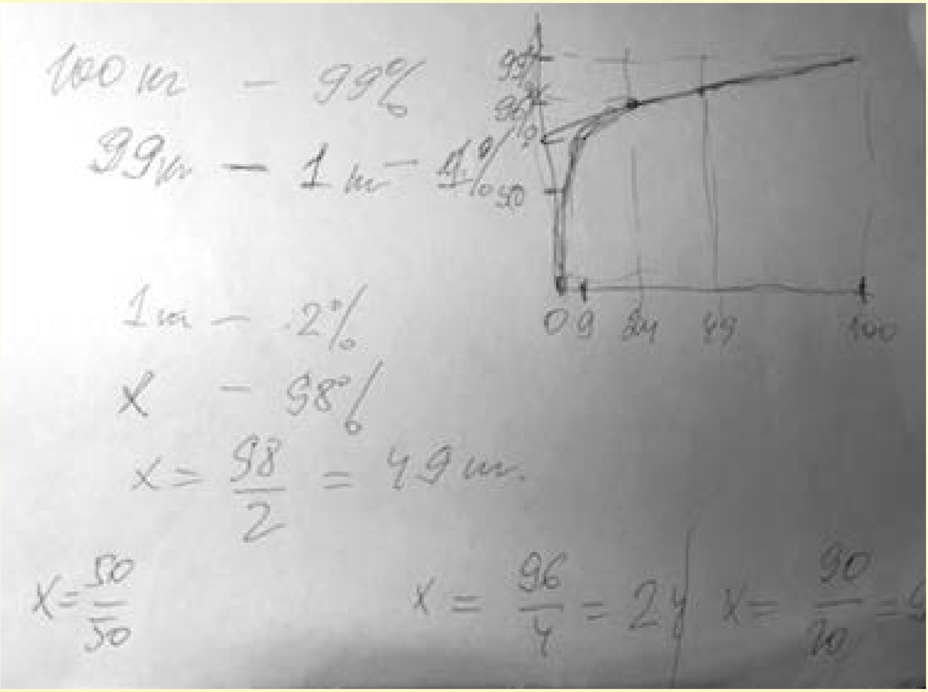
О т в е т: (очень) велика, если учеников (сильно) больше n0, (очень) мала, если (сильно) меньше n0, а вот чему равно это n0 (когда p ≈ 1/2) надо найти.

71. Составим последовательность степеней двойки: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048, ... У первых двенадцати чисел десятичная запись начинается с 1 у четырех, а с 7 ни у одного.
Доказать, что в пределе n → ∞ первая цифра чисел 2m, 0 ⍰ m ⍰ n, будет в среднем встречаться с определенной частотой:
p1 ≈30%, p2 ≈18%, ..., p9 ≈4%.

Добавим еще одну задачу, разбираемую Арнольдом В.И. в другой работе:
«Гребец плыл на лодке вверх по Неве. Под Троицким мостом у него сшибло шляпу, Поднявшись до Литейного моста, он встретил друга, который ему на это указал. Тогда гребец поплыл вниз, вслед за шляпой (с такой же, как прежде, скоростью относительно воды) , и догнал ее через 20 минут, под Дворцовым мостом. Определите скорость течения Невы».
Математику ясно, что эта задача неразрешима. Но составители были лицемерами (или физиками?). Они решали ее так: «согласно принципу относительности Галилея, гребец отплывал от шляпы вверх и догонял ее вниз одинаковое время — те же 20 минут. Значит, шляпа проплыла от Троицкого моста до Дворцового за 40 минут. А так как расстояние между этими мостами составляет одну милю, то...». [Арнольд2002, с.8-9]

{Да, для решения этой задачи требуется знать расстояние между мостами, которого нет в условии. И этим задача близка к реальности. А расстояние легко определить из Google Maps. Потребуется линейка? На андроиде есть специальная функция вычисления расстояния между точками. А скорость течения Невы можно проверить по Википедии.}


В. И. Арнольд
«Жёсткие» и «мягкие» математические модели
Династия


100 кг — 99%
99 кг — 1 кг — 1%
1 кг — 2%
x — 98%
x = 98/2 = 49 кг.
x = 50/50
x = 96/4 = 24
x = 90/10
99
96
90
50
0
9
24
49
100